2012年3月27日　日本数学会 2012年度年会

$K3$曲面のネロン・セベリ格子に自明に作用する非シンプレクティック自己同型

瀧　真語　　(Shingo Taki)

東京電機大学情報環境学部

1　はじめに

X：$K3$曲面.
ω_X：至るところ消えない2-form.

$$S_X := \{x \in H^2(X,\mathbb{Z}) | \langle x, \omega_X \rangle = 0\}$$

$$T_X := \{y \in H^2(X,\mathbb{Z}) | \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in S_X\}$$

今回は

- $\varphi^* | S_X =$ id
- $\varphi^* \omega_X = \zeta \omega_X$　　（ζは1の原始$\mathrm{ord}\,\varphi$乗根.）

をみたす自己同型φの話.

2　何が問題か？

既に知られている事

- $\operatorname{ord}\varphi$ の値．
- $\operatorname{ord}\varphi$ が素数または合成数の場合．
- $\operatorname{ord}\varphi$ が 3 ベキまたは 5 ベキの場合．
- $\operatorname{ord}\varphi$ が 2 ベキで $\operatorname{rk}T_X$ と等しい場合．

などが Nikulin, Kondo, Oguiso, Zhang, Artebani, Sarti, Schütt, T 達によって調べられた．

$\operatorname{ord}\varphi$ が 2 ベキの場合は完全に分かったわけではない．
例えば，$\operatorname{rk}T_X$ が偶数ならば，X は位数 4 の φ を持つ可能性がある．

3　2-elementary 格子

命題. X が 2 ベキ位数の φ を持つ場合，S_X は 2-elementary 格子になる．すなわち，$S_X^*/S_X \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^a$

たとえば D_4 は $a=2$ の 2-elementary 格子．
$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ は $a=0$ の 2-elementary 格子．

適当な条件付の 2-elementary 格子は分類可能で，S_X をリストアップすることができる．$(\mathrm{rk}\, S_X, a, \delta)$ で特徴付け．

定義.

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{if } x^2 \in \mathbb{Z}, \forall x \in S_X^*, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

4　主定理

主定理． X が位数4のφを持つとき，S_X は$U \oplus E_8(2)$，$U(2) \oplus E_8(2)$，$U \oplus D_4^{\oplus 3}$，$U \oplus D_8^{\oplus 2}$ 以外の$\delta = 0$な 2-elementary 格子で，固定点集合は

$$
\begin{cases}
\{P_1, P_2, \ldots, P_4\} & \text{if } \operatorname{rk} S_X = 2, \\
\{P_1, P_2, \ldots, P_6\} \amalg E_1 & \text{if } \operatorname{rk} S_X = 6, \\
\{P_1, P_2, \ldots, P_8\} \amalg E_1 \amalg E_2 & \text{if } \operatorname{rk} S_X = 10, \\
\{P_1, P_2, \ldots, P_{10}\} \amalg E_1 \amalg E_2 \amalg E_3 & \text{if } \operatorname{rk} S_X = 14, \\
\{P_1, P_2, \ldots, P_{12}\} \amalg E_1 \amalg E_2 \amalg E_3 \amalg E_4 & \text{if } \operatorname{rk} S_X = 18,
\end{cases}
$$

という形をしている．P_i は孤立点，E_j は非特異有理曲線．

5　証明の概略

1. 2次形式の簡単な計算により，$\delta = 1$ のとき T_X は φ を導くような位数4の isometry を持たない．
   $\rightsquigarrow S_X$ の候補は16種類．

2. レフシェッツの公式により，

$$\begin{cases} \text{孤立固定点の数} & = (\mathrm{rk}\, S_X + 6)/2 \\ \text{固定点集合のオイラー数} & = \mathrm{rk}\, S_X + 2 \end{cases}$$

3. 位数2の非シンプレクティック自己同型（$= \varphi^2$）の固定点集合の様子を手掛かりに，ケース・バイ・ケースで調べる．

位数8, 16の場合の基本戦略は同じ．