2013年9月27日　日本数学会 2013年度秋季総合分科会

On Oguiso's $K3$ surface

瀧　真語　　(Shingo Taki)

東京電機大学情報環境学部

1　はじめに

X：$K3$曲面．
ω_X：至るところ消えない2-form．
$S_X := \{x \in H^2(X, \mathbb{Z}) | \langle x, \omega_X \rangle = 0\}$
$T_X := \{y \in H^2(X, \mathbb{Z}) | \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in S_X\}$

σ：X上の位数Iの自己同型．

定義　σが非シンプレクティック$\Leftrightarrow \sigma^* \omega_X = \zeta_I \omega_X$

命題(Nikuin)
ΦをEuler 関数とすると，$\Phi(I)$は$\mathrm{rk}\, T_X$を割り切る．
なお$2 \leq \mathrm{rk}\, T_X \leq 21$である．

2　I が素数ベキのとき

I が素数ベキのとき，その値は次のいずれか．

- 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
- 4, 8, 16, 32
- 9, 27
- 25

命題（金銅）　$I = 32$ **ならば** σ^* **は** S_X **に自明に作用しない．**

注意． I **を上のリストの値として，** $I \neq 32$ **であれば，** S_X **に自明に作用する** $(X, \langle\sigma\rangle)$ **の例は存在する．**

3　小木曽の $K3$ 曲面 (1)

例（小木曽）

- $X_{\mathrm{og}} : y^2 = x^3 + t^2 x + t^{11}$,
- $\sigma_{\mathrm{og}}(x, y, t) = (\zeta_{32}^{18} x, \zeta_{32}^{11} y, \zeta_{32}^{2} t)$

とすると X_{og} は $K3$ 曲面で，σ_{og} は X_{og} 上の位数 32 の非シンプレクティック自己同型である．
特に σ_{og} は Néron-Severi 格子 $S_{X_{\mathrm{og}}}$ へ位数 2 で作用する．

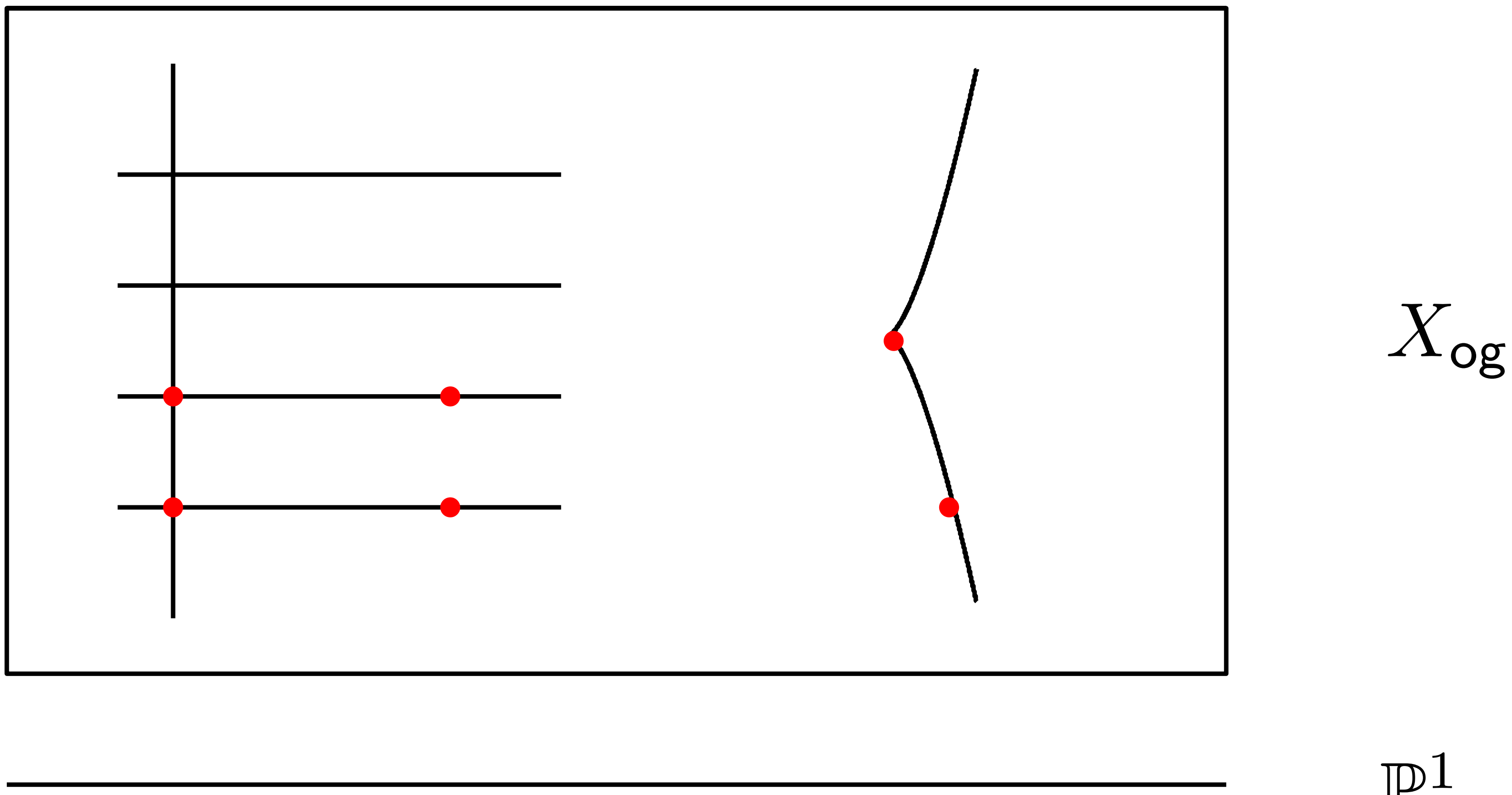
主定理

X を $K3$ 曲面，σ を X 上の位数 32 の非シンプレクティック自己同型とする．このとき組 $(X, \langle\sigma\rangle)$ は組 $(X_{\mathrm{og}}, \langle\sigma_{\mathrm{og}}\rangle)$ に同型である．

4　小木曽の $K3$ 曲面 (2)

$X_{\mathrm{og}} : y^2 = x^3 + t^2 x + t^{11}$，

$\sigma_{\mathrm{og}} : (x, y, t) \mapsto (\zeta_{32}^{18} x, \zeta_{32}^{11} y, \zeta_{32}^{2} t)$



$$\mathrm{Fix}(\sigma_{\mathrm{og}}) = \{P_1, \ldots, P_6\}$$

5　証明の概略

X：$K3$曲面，σ：位数32の非シンプレクティック自己同型．

1. $\Phi(32) = 16$は$\mathrm{rk}\, T_X$を割り切るので，$\mathrm{rk}\, S_X = 6$．
2. レフシェッツの公式$+\alpha$により，次がわかる．
   - $\mathsf{Fix}(\sigma) = \{P_1, \ldots, P_6\}$．
   - 不変格子$S_X^\sigma := \{x \in S_X | \sigma^*(x) = x\}$の階数は5．
   - σ^*はS_Xへ位数2で作用する．
3. σ-安定な楕円曲面$\pi : X \to \mathbb{P}^1$の構造を調べる．
   （σ^m，$m =$2, 4, 8, 16の固定点集合の様子が手がかり）
4. Xの Weierstrass 方程式 を決定．