GALOIS 点を持つ 4 次曲面と EISENSTEIN $K3$ 曲面

瀧　真語

Abstract. このノートでは Galois 点を持つ 4 次曲面と位数 3 の自己同型を持つ $K3$ 曲面との対応を見る．なおこれは 2023 年 12 月 9 日に行われた「第 21 回代数曲線論シンポジウム」の報告書である．

1. はじめに

この研究は三浦敬さんとの共同研究である．用語の説明や定義は Section 2 以降で行うが，詳細は [7] を参照してほしい．

ことの発端は「4 次曲面 $S_8 : XY^3 + ZW^3 + X^4 + Z^4 = 0$ は Galois 点を最大個数持つのだが，これは何者か？」という感じの問であった．スタートの時点で，S_8 を $K3$ 曲面と思って調べることは基本設定だったので「S_8 は $K3$ 曲面として何者か？」という問だったのかもしれない．何者と言われても，方程式はキッチリ与えられているし，古典的にもよく調べられている（[10, 11]）曲面なので,「この問題はそもそも問題か？」という疑問もなくはなかった．

S_8 を $K3$ 曲面と思う事自体は良いのだが，取っ掛かりが難しかった．S_8 は色々な自己同型を持つことは分かるが，相性の良さそうな自己同型が幾つか（たとえば Remark 4.2）あり，どの自己同型に注目すべきか迷った．自己同型から切り離して考えていた期間も長かったが，2023 年 3 月に名古屋大学で行われた研究集会[1]で Eisenstein $K3$ 曲面 という単語を何度か耳にし，馬さんや大橋さん[2]の顔を見たので「まあ，これで一度やってみるか」と思った次第である．

Date: December 26, 2023.

2020 *Mathematics Subject Classification.* Primary 14J70; Secondary 14J28, 14J50, 14N05.

Key words and phrases. Galois 点, 自己同型, $K3$ 曲面.

本研究は JSPS 科研費 18K03230, 19K03454, 23K03036 の助成を受けたものです．

[1] K3, Enriques Surfaces, and Related Topics. 金銅先生の退職を記念した研究集会である．

[2] 彼らと私が名づけ親である．[6]

その後ガチャガチャやって得られた結果が次であるが，ポイントは S_8 だけを考えるのではなく，Galois 点を持つ非特異 4 次曲面全部を考えるということである．そうする事で Eisenstein $K3$ 曲面の世界が自然に出てくる．

Main Theorem. 以下が成り立つ．

(1) 非特異 4 次曲面 S が（内）Galois 点 P を持ち，G_P を P に付随する Galois 群[3]とする．このとき組 (S, G_P) は $(4,3)$ 型の Eisenstein $K3$ 曲面である．逆に (S,G) を $(4,3)$ 型の Eisenstein $K3$ 曲面とすると，S は Galois 点 Q を持つ非特異 4 次曲面と同型であり，G は G_Q と同型である．

(2) Galois 点を最大個数（8 個）持つ非特異 4 次曲面 S_8 は超越格子が $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ で与えられる特異 $K3$ 曲面である．

「S_8 を特徴付けよ」という問題は Galois 点の問題集 [18, $\boxed{\text{I}}$-(B)-(1)-(b)] にもあるので，上の Main Theorem (2) はそれに対する一つの[4]答えになっている．

2. Eisenstein $K3$ 曲面

Eisenstein $K3$ 曲面とは「適当な条件を満たす自己同型群と $K3$ 曲面の組」のことである．詳細は [6] を見てほしい．自己同型（群）に関しては [1, 14, 15] 等を，$K3$ 曲面そのものの詳細は [2, 5] 等を参照して欲しい．

標準因子が自明で，不正則数が 0 であるコンパクトな複素曲面を $K3$ 曲面と呼ぶ．以下 S を $K3$ 曲面とする．標準因子が自明ということから $H^{2,0}(S) = H^0(S, \Omega_S^2)$ は一次元であることに注意する．さて，S の有限自己同型群 $G \subset \mathrm{Aut}(S)$ が $H^0(S, \Omega_S^2)$ に忠実に作用している[5]とする．

Lemma 2.1. 上の (S, G) に対して，以下が成り立つ．

(1) S は代数的である．

(2) G はアーベル群である．

---

[3] Galois 点 P に属する自己同型が生成する群，と言う．

[4] より良い（ふさわしい？）特徴づけはあると思う．

[5] $H^0(S, \Omega_S^2)$ の生成元を ω_S とすると，任意の $g \in G$ に対して $g^*\omega_S \neq \omega_S$ である．

S の 2 次コホモロジー $H^2(S,\mathbb{Z})$ にはカップ積 $\langle\ ,\ \rangle$ によって格子の構造が定まるが，G-不変な部分格子を $L := \{x \in H^2(S,\mathbb{Z}) \mid g^*(x) = x, \forall g \in G\}$ と定める．また L の双対格子を $L^* = \mathrm{Hom}(L,\mathbb{Z})$ とするとき，次が知られている．

Lemma 2.2. G の位数が素数 p であるとき，L^*/L は群 $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^a$ に同型である．このような L を p-elementary 格子と言う．またこのノートで扱うような p-elementary 格子において，L の階数と a が p-elementary 格子としての不変量である．

Definition 2.3. ([6, §3]) G の位数を 3 とする．L の階数が r であり，$L^*/L \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^a$ を満たすのとき，組 (S,G) を (r,a) 型の Eisenstein $K3$ 曲面という．

ある程度 $K3$ 曲面の自己同型の話題に慣れている人向けに言うと，Eisenstein $K3$ 曲面とは「$K3$ 曲面と位数 3 の非シンプレクティック自己同型の組」に他ならない．

Proposition 2.4. ([1], [14]) (S,G) を (r,a) 型の Eisenstein $K3$ 曲面とする．このとき固定点集合 S^G は

$$S^G = C^{(g)} \amalg E_1 \amalg \cdots \amalg E_k \amalg \{P_1,\ldots,P_n\}$$

という型をしている．ここで $C^{(g)}$ は種数 g の非特異曲線，E_i は非特異有理曲線，P_j は孤立点である．また

$$g = \frac{22-r-2a}{4}, \qquad k = \frac{2+r-2a}{4}, \qquad n = \frac{r}{2} - 1.$$

が成り立つ．

Remark 2.5. （[8, §5]）アーベル群 G が $H^{2,0}(S) = H^0(S,\Omega_S^2)$ に忠実に作用していない場合[6]の固定点集合 S^G は曲線を含むことは無く，孤立固定点のみから成る．特に G の位数が 3 のとき，S^G は 6 点である．

Example 2.6. $F_d(X,Y,Z)$ を d 次斉次式，ζ_n を 1 の原始 n 乗根とする．S を $F_4(X,Y,Z) + F_1(X,Y,Z)W^3 = 0$ で定義される非特異 4 次曲面とすると S には射影変換 $\sigma : [X:Y:Z:W] \mapsto [X:Y:Z:\zeta_3 W]$ が自己同型として作用する．

[6] $G = \langle g \rangle$ のとき $g^*\omega_S = \omega_S$ を満たす場合

このとき σ で生成される S の自己同型群 $G := \langle\sigma\rangle$ の固定点集合は

$$\begin{aligned} S^G &= S \cap (\{W=0\} \amalg \{X=Y=Z=0\}) \\ &= \{F_4(X,Y,Z)=0\} \amalg \{[0:0:0:1]\} \\ &= C^{(3)} \amalg \{[0:0:0:1]\}. \end{aligned}$$

である．Proposition 2.4 により $(r,a)=(4,3)$ であることが分かる．従って組 (S,G) は $(4,3)$ 型の Eisenstein $K3$ 曲面である．

3. Galois 点を持つ 4 次曲面

ここでは Galois 点を持つ 4 次曲面の基本事項（詳細は [4, 16] を参照）をおさらいした後，Galois 点を持つ 4 次曲面と Galois 点から定まる (Galois) 群との組みを考えることで Eisenstein $K3$ 曲面が定まることを見る．

Definition 3.1. V を n 次元射影空間 $\mathbb{P}^n$ の非特異な超曲面とし，その関数体を $\mathbb{C}(V)$ とする．点 $P \in \mathbb{P}^n$ に対し，射影 $\pi_P : V \dashrightarrow H$ を考える．ここで H は P を含まない $\mathbb{P}^n$ の超平面である．

この射影 π_P を用いて関数体の拡大 $\mathbb{C}(V)/\pi_P^*\mathbb{C}(H)$ を考えることができるが，これが Galois 拡大の時，P を V の Galois 点という．

Galois 点 P が $P \in V$ のとき内 Galois 点，$P \notin V$ のとき外 Galois 点と区別することがある．しかし，このノートに表れる Galois 点は全部内 Galois 点なので，特に区別することをせず，単に Galois 点と呼ぶ事にする．

Proposition 3.2. ([16]) 非特異 4 次曲面 S が Galois 点を持つとき，S の方程式は（射影変換の違いを除いて）以下のいずれかである．

(1) $F_4(X,Y,Z) + F_1(X,Y,Z)W^3 = 0,$
(2) $F_4(X,Z) + F_1(X,Z)Y^3 + G_1(X,Z)W^3 = 0,$
(3) $F_4(X,Y) + Z^4 + ZW^3 = 0,$
(4) $X^4 + Z^4 + XY^3 + ZW^3 = 0.$

さらに各 S の Galois 点はそれぞれ

(1) $[0:0:0:1],$
(2) $[0:1:0:0], [0:0:0:1],$
(3) $[0:0:0:1], [0:0:\zeta_6^i:1]\quad (i=1,3,5),$

(4) $[0:0:0:1], [0:0:\zeta_6^i:1], [0:1:0:0], [\zeta_6^i:1:0:0] \quad (i=1,3,5)$,

である．

P が Galois 点のとき，体の拡大 $\mathbb{C}(S)/\pi_P^*\mathbb{C}(\mathbb{P}^2)$ は Galois なので，Galois 群[7]が定まる．それを G_P と記す．

Lemma 3.3. ([4, Lemma 2]) 非特異 4 次曲面が持つ Galois 点を $P_1 := [0:0:0:1], P_2 := [0:0:\zeta_6:1], P_3 := [0:0:\zeta_6^3:1], P_4 := [0:0:\zeta_6^5:1], P_5 = [0:1:0:0], P_6 := [\zeta_6:1:0:0], P_7 := [\zeta_6^3:1:0:0], P_8 := [\zeta_6^5:1:0:0]$ とし，σ_i を $G_{P_i} \ (i=1,2,\dots,8)$ の生成元とする．このとき σ_i は以下の射影変換である：

$$\sigma_1 : [X:Y:Z:W] \mapsto [X:Y:Z:\zeta_3 W],$$
$$\sigma_2 : [X:Y:Z:W] \mapsto \left[X:Y:\frac{2\zeta_6-1}{3}Z+\frac{-\zeta_6-1}{3}W:\frac{4\zeta_6-2}{3}Z+\frac{\zeta_6+1}{3}W\right],$$
$$\sigma_3 : [X:Y:Z:W] \mapsto \left[X:Y:\frac{2\zeta_6-1}{3}Z+\frac{-\zeta_6+2}{3}W:\frac{-2\zeta_6+4}{3}Z+\frac{\zeta_6+1}{3}W\right],$$
$$\sigma_4 : [X:Y:Z:W] \mapsto \left[X:Y:\frac{2\zeta_6-1}{3}Z+\frac{2\zeta_6-1}{3}W:\frac{-2\zeta_6-2}{3}Z+\frac{\zeta_6+1}{3}W\right],$$
$$\sigma_5 : [X:Y:Z:W] \mapsto [X:\zeta_3 Y:Z:W],$$
$$\sigma_6 : [X:Y:Z:W] \mapsto \left[\frac{2\zeta_6-1}{3}X+\frac{-\zeta_6-1}{3}Y:\frac{4\zeta_6-2}{3}X+\frac{\zeta_6+1}{3}Y:Z:W\right],$$
$$\sigma_7 : [X:Y:Z:W] \mapsto \left[\frac{2\zeta_6-1}{3}X+\frac{-\zeta_6+2}{3}Y:\frac{-2\zeta_6+4}{3}X+\frac{\zeta_6+1}{3}Y:Z:W\right],$$
$$\sigma_8 : [X:Y:Z:W] \mapsto \left[\frac{2\zeta_6-1}{3}X+\frac{2\zeta_6-1}{3}Y:\frac{-2\zeta_6-2}{3}X+\frac{\zeta_6+1}{3}Y:Z:W\right].$$

ここで σ_i は位数 3 であることに注意する．

Theorem 3.4. S を Galois 点 P を持つ非特異な 4 次曲面とする．このとき (S, G_P) は $(4,3)$ 型の Eisenstein $K3$ 曲面である．

Proof. 色々な証明がありそうだが，ここでは直接計算で確認する．

[7]もちろんこれは S に自己同型として作用する．

まず $P=P_1=[0:0:0:1]$ とする．このとき Proposition 3.2 と Lemma 3.3 により，S を $F_4(X,Y,Z)+F_1(X,Y,Z)W^3=0$，$G_P$ の生成元を $\sigma:[X:Y:Z:W]\mapsto[X:Y:Z:\zeta_3 W]$ と仮定して良い．これは Example 2.6 そのものであり，(S,G_P) は $(4,3)$ 型の Eisenstein $K3$ 曲面であることが分かる．

次に $P=P_2=[0:0:\zeta_6:1]$ の場合を調べる．このとき Proposition 3.2 と Lemma 3.3 により，S を $F_4(X,Y)+Z^4+ZW^3=0$，G_P の生成元を Lemma 3.3 にある σ_2 として良い．つまり行列 $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{2\zeta_6-1}{3}&\frac{-\zeta_6-1}{3}\\0&0&\frac{4\zeta_6-2}{3}&\frac{\zeta_6+1}{3}\end{pmatrix}$ で定まる射影変換である．固定点 $[X:Y:Z:W]\in S^{G_P}$ を取ると，零でない定数 $k\in\mathbb{C}^*$ が存在し，

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\frac{2\zeta_6-1}{3}&\frac{-\zeta_6-1}{3}\\0&0&\frac{4\zeta_6-2}{3}&\frac{\zeta_6+1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\W\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\W\end{pmatrix}$$

を満たすことに注意する．つまり

$$\begin{pmatrix}1-k&0&0&0\\0&1-k&0&0\\0&0&\frac{2\zeta_6-1}{3}-k&\frac{-\zeta_6-1}{3}\\0&0&\frac{4\zeta_6-2}{3}&\frac{\zeta_6+1}{3}-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\W\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

である．$[X:Y:Z:W]$ は射影空間の点であるから，この連立一次方程式は非自明な解 $(X,Y,Z,W)\neq(0,0,0,0)$ を持つ．従って係数行列は

$$\begin{vmatrix}1-k&0&0&0\\0&1-k&0&0\\0&0&\frac{2\zeta_6-1}{3}-k&\frac{-\zeta_6-1}{3}\\0&0&\frac{4\zeta_6-2}{3}&\frac{\zeta_6+1}{3}-k\end{vmatrix}=0$$

を満たす．$-\zeta_6=\zeta_6^4$ と $1+\zeta_6^2+\zeta_6^4=0$ に注意して左辺を計算すると $(1-k)^2(k^2-\zeta_6 k+\zeta_6^2)$ であるから，$k=1,\zeta_3$ である．

$k=1$ とすると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\zeta_6-1}{3} & \frac{-\zeta_6-1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4\zeta_6-2}{3} & \frac{\zeta_6+1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$$

であるが,これより $2Z+\zeta_6 W=0$ を得る.つまりこのときは固定曲線 $\{[X:Y:Z:W]\in S \mid 2Z+\zeta_6 W=0\}=\{F_4(X,Y)-\frac{9\zeta_6}{16}W^4=0\}$ が出てくる.この曲線は 4 次式で与えられているので,種数は 3 である.

$k=\zeta_3$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\zeta_6-1}{3} & \frac{-\zeta_6-1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4\zeta_6-2}{3} & \frac{\zeta_6+1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = \zeta_3 \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}$$

であるから,$X=Y=0, Z=\zeta_6, W=1$ である.つまり孤立点 $[X:Y:Z:W]=[0:0:\zeta_6:1]$ を得た.

以上より,固定点集合 S^{G_P} は種数 3 の非特異曲線と 1 つの孤立点からなる.(S,G_P) が $(4,3)$ 型の Eisenstein $K3$ 曲面であることを示すためには一応 G_P の $H^0(S,\Omega_S^2)$ への作用の確認が必要であるが,Remark 2.5 と固定曲線が存在することより,忠実である.

$P_3,\dots,P_8$ の場合も同様に直接計算可能である. □

実はこれの逆「のような事」も成り立つ.

Proposition 3.5. ([1, Proposition 4.9]) (S,G) を $(4,3)$ 型の Eisenstein $K3$ 曲面とする.このとき埋め込み $\varphi : S\to\mathbb{P}^3$ が存在し,S は非特異 4 次曲面 $F_4(X,Y,Z)+F_1(X,Y,Z)W^3=0$ と同型となる.また G の生成元は射影変換 $\sigma:[X:Y:Z:W]\mapsto[X:Y:Z:\zeta_3 W]$ に対応する.

これと Proposition 3.2 (1) によると $(4,3)$ 型の Eisenstein $K3$ 曲面の唯一の孤立固定点がちょうど S の Galois 点になるように思うが,微妙なところで引っ掛かりがある.Galois 点の定義(Definition 3.1)として「S は 3 次元射影空間の超曲面として与えられている」という事が要請されている.しかし $(4,3)$ 型の Eisenstein $K3$ 曲面は必ずしも 3 次元射影空間の超曲面として得ら

れるとは限らない．たとえば [14, Example 4.3]．なんとも惜しい感じがするが，もちろんこれにも名前がついていて「Galois 埋め込み」と呼ばれる．(詳細は [17] を参照）

なお，上の埋め込み φ は以下のように作る：Proposition 2.4 より $(4,3)$ 型の Eisenstein $K3$ 曲面 (S,G) の固定点集合には種数 3 の非特異曲線 $C^{(3)}$ が存在する．Riemann-Roch の定理等を用いることで，$\dim H^0(S,\mathcal{O}_S(C^{(3)}))=4$ であることが分かる．従って線形系 $|C^{(3)}|$ に付随した有理写像 $\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ が定まる．あとはこれが埋め込みになることを見れば良いのだが，[9, Theorem 5.2, Theorem 6.1] によって，$C^{(3)}$ と楕円曲線の交点数が 2 点でなければ，φ は埋め込みである事が知られている．なお，今の場合は Hurwitz の公式により $C^{(3)}$ と楕円曲線は（交わるとすれば）3 点で交わる．

Remark 3.6. 上の主張は「Galois 点を持つ非特異 4 次曲面は $(4,3)$ 型の Eisenstein $K3$ 曲面である」ではない．非特異 4 次曲面に自己同型として作用する群を指定してやる必要がある．

Lemma 3.3 によると，Galois 点を多く持てば，その分自己同型も増える．たとえば $S : F_4(X,Z)+F_1(X,Z)Y^3+G_1(X,Z)W^3=0$ は Galois 点を 2 つ持つ．P_1, P_5 と記したものである．それらから自己同型 σ_1, σ_5 が定まるが，それらを合成した $\sigma_1 \circ \sigma_5$ は射影変換 $[X:Y:Z:W] \mapsto [X:\zeta_3 Y:Z:\zeta_3 W]$ であるから，$G := \langle \sigma_1 \circ \sigma_5 \rangle$ とすると，固定点集合 S^G は 1 つの射影直線と 4 つの孤立固定点からなる．すなわち (S,G) は $(10,6)$ 型の Eisenstein $K3$ 曲面である．

4. 最大個数の Galois 点を持つ非特異 4 次曲面

Proposition 3.2 のよると，非特異 4 次曲面が Galois 点を持つのであれば，その個数は 1, 2, 4, 8 のいずれかであった．ここでは 8 点の Galois 点を持つ非特異 4 次曲面 S_8 を考察する．最初にも書いた気がするが，この研究の一番最初の問題意識は「Galois 点を 8 個持つ非特異 4 次曲面は（$K3$ 曲面として）何者か？」であった．Proposition 3.2 (4) より，S_8 は $XY^3+X^4+ZW^3+Z^4=0$ で与え[8]られる．この方程式から 2 つの楕円曲線 $E_1 : y^2 = (Y/X)^3+1$ と

[8] この曲面は Schur の 4 次曲面 [10] と呼ばれており，非特異 4 次曲面のなかで最大個数（64 本）の $\mathbb{P}^1$ を持つことが知られている．[11]

$E_2 : y^2 = (W/Z)^3 + 1$ が得られるが，この E_1 と E_2 の情報を用いて S_8 の特徴付けを行う．

E_1 と E_2 は同種であり，どちらも虚数乗法を持つことに注意する．このことから次が成り立つ．

Proposition 4.1. ([3, Theorem 2])

(1) S_8 は特異，すなわち Picard 数は 20 である．

(2) $\sigma := (\sigma_1 \circ \sigma_3)^3 : [X : Y : Z : W] \mapsto [X : Y : -Z : -W]$ とおく．このとき商曲面 $S_8/\langle\sigma\rangle$ は 8 個の A_1 型特異点を持つが，その極小特異点解消は直積型 Kummer 曲面 $\mathrm{Km}(E_1 \times E_2)$ と同型である．

Remark 4.2. 群 $\langle\sigma\rangle$ は位数 2 であり，$H^0(S, \Omega_S^2)$ に自明に作用する（つまり忠実ではない）ので，Eisenstein $K3$ 曲面とは到底結びつかない．しかし商曲面 $S_8/\langle\sigma\rangle$ の 8 点の特異点はいずれも 8 点の Galois 点に対応する．

今まであまり格子の言葉を使ってこなかったが，ここで一つ用意する．以前にも述べたが，$H^2(S_8, \mathbb{Z})$ には格子の構造が入った．S_8 の Néron-Severi 格子[9]の $H^2(S_8, \mathbb{Z})$ における直交補格子を超越格子と言う．Proposition 4.1(1) より，S_8 の直交補格子の階数は 2 である．このとき次が成り立つ．

Proposition 4.3. ([12, Theorem 4]) 特異 $K3$ 曲面に対し，その超越格子の Gram 行列を対応させるという対応を考える．これは特異 $K3$ 曲面の同型類と，偶で正定値な 2×2 行列の $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用による同値類の間に一対一の対応を与える．

つまり S_8 の超越格子を決定することは，S_8 を $K3$ 曲面としての特徴付けることを意味する．

Proposition 4.4. S_8 の超越格子の Gram 行列は $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ である[10].

Proof. [3, Theorem 2] により S_8 の超越格子はアーベル曲面 $E_1 \times E_2$ の超越格子[11]の内積を 4 倍したものと同型であることが知られている．

[9]Néron-Severi 群とカップ積によって定まる格子．

[10]格子の言葉で言うと，正定値なルート格子の内積を 4 倍した格子 $A_2(4)$ と同型ある．

[11]$K3$ 曲面の場合と同様で，Néron-Severi 格子の $H^2(E_1 \times E_2, \mathbb{Z})$ における直交補格子のことである．

つまり S_8 の超越格子の Gram 行列を $\begin{pmatrix} 8a & 4b \\ 4b & 8c \end{pmatrix}$，$E_1 \times E_2$ の超越格子の Gram 行列を $\begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}$ と仮定して良い．

E_1 と E_2 は位数 3 の自己同型が作用しているので，$E_1 = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \zeta_3\mathbb{Z}$ と $E_2 = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \zeta_3\mathbb{Z} \simeq \mathbb{C}/\mathbb{Z} + (-\zeta_3^2)\mathbb{Z}$ と書ける．このとき $E_1 \times E_2$ の超越格子の Gram 行列の成分にある整数 a, b, c は

$$\zeta_3 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad -\zeta_3^2 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

を満たすことが知られている．([13, §3 (I)]) 従って $a = b = c = 1$ である． □

References

[1] M. Artebani, A. Sarti, Non-symplectic automorphisms of order 3 on $K3$ surfaces, Math. Ann. **342** (2008), 903–921.

[2] D. Huybrechts, *Lectures on K3 surfaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **158**. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.

[3] H. Inose, On certain Kummer surfaces which can be realized as non-singular quartic surfaces in $\mathbf{P}^3$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **23** (1976), 545–560.

[4] M. Kanazawa, T. Takahashi, H. Yoshihara, The group generated by automorphisms belonging to Galois points of the quartic surface, Nihonkai Math. J. **12** (2001), no.1, 89–99.

[5] S. Kondo, *K3 surfaces*, EMS Tracts in Mathematics, **32**, European Mathematical Society Publishing House, 2020.

[6] S. Ma, H. Ohashi and S. Taki, Rationality of the moduli spaces of Eisenstein $K3$ surfaces, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), no. 12, 8643–8679.

[7] K. Miura, S. Taki, Quartic surfaces with a Galois point and Eisenstein $K3$ surfaces, (2023), preprint, arXiv:2308.11102.

[8] V.V. Nikulin, Finite automorphism groups of Kählerian $K3$ surfaces, Trans. Moscow Math. Soc. **38** (1980), No 2, 71–135.

[9] D. Saint-Donat, Projective models of $K3$ surfaces, Am. J. Math. **96**(4) (1974), 602–639.

[10] F. Schur, Ueber eine besondre Classe von Flächen vierter Ordnung, Math. Ann. **20**(2) (1882), 254–296.

[11] B. Segre, The maximum number of lines lying on a quartic surface, Quart. J. Math., Oxford Ser. **14** (1943), 86–96.

[12] T. Shioda, H. Inose, On singular $K3$ surfaces, Complex analysis and algebraic geometry, 119–136. Iwanami Shoten, Tokyo, 1977.

[13] T. Shioda, N. Mitani, Singular abelian surfaces and binary quadratic forms, in *Classification of Algebraic Varieties and Compact Complex Manifolds*, p. 259–287, Lecture Notes in Mathematics, vol 412. Springer, Berlin, Heidelberg, 1974.

[14] S. Taki, Classification of non-symplectic automorphisms of order 3 on $K3$ surfaces, Math. Nachr. **284** (2011), 124–135.

[15] S. Taki, Automorphisms of $K3$ surfaces and their applications, RIMS Kôkyûroku Bessatsu. **B78** (2020), 179–198.

[16] H. Yoshihara, Galois points on quartic surfaces, J. Math. Soc. Japan **53** (2001), 731–743.

[17] H. Yoshihara, Galois embedding of algebraic variety and its application to abelian surface, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **117** (2007), 69–85.

[18] H. Yoshihara and S. Fukasawa, List of problems, https://sites.google.com/sci.kj.yamagata-u.ac.jp/fukasawa-lab/open-questions-english/

〒 259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1 東海大学理学部数学科

Email address: taki@tsc.u-tokai.ac.jp

URL: http://www2.sm.u-tokai.ac.jp/taki/