Galois 点と $K3$ 曲面

瀧　真語[1]　三浦　敬[2]

[1] 東海大学理学部数学科 [2] 山口大学大学院創成科学研究科工学系学域

2025 年度秋季総合分科会

Galois 点とは？

$V \subset \mathbb{P}^n$：非特異な超曲面
$\mathbb{C}(V)$：V の関数体

$P \in \mathbb{P}^n$ に対し，P からの射影 $\pi_P : V \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ を考える．

P が V の **Galois 点** $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathbb{C}(V)/\pi_P^*\mathbb{C}(\mathbb{P}^{n-1})$ が Galois 拡大

特に

- $P \in V$ のとき内 Galois 点
- $P \notin V$ のとき外 Galois 点

という．

知られていること

命題 (Yoshihara, Kanazawa-Takahashi- Yoshihara)

S：非特異 4 次曲面

1. S が内 Galois 点を持つ時，適当な射影変換を施すと，S の方程式は $F_4(X,Y,Z)+F_1(X,Y,Z)W^3=0$ で与えられる．
2. S が外 Galois 点を持つ時，適当な射影変換を施すと，S の方程式は $F_4(X,Y,Z)+W^4=0$ で与えられる．
3. P を S の内 (resp. 外)Galois 点とする．$G_P := \mathrm{Gal}(\mathbb{C}(S)/\pi_P^*\mathbb{C}(\mathbb{P}^2))$ は位数 3 (resp. 4) の巡回群で，S に自己同型として作用し，生成元は具体的な射影変換として書ける．

問題と主定理

Galois 点を持つ 4 次曲面は $K3$ 曲面として何者か？

定理 (Miura-T)

次の一対一対応が存在する．

1. {内 Galois 点 を持つ 4 次曲面} $/PGL$ $\longleftrightarrow$ {$(4,3)$ 型の Eisenstein $K3$ 曲面} $/\simeq$
2. {外 Galois 点 を持つ 4 次曲面} $/PGL$ $\longleftrightarrow$ {$(1,0,0,3)$ 型の Gaussian $K3$ 曲面} $/\simeq$

Eisenstein $K3$ 曲面

S：$K3$ 曲面，　　$G \subset \mathrm{Aut}(S)$：位数 3 の群

補題

G が $H^{2,0}(S) = H^0(S, \Omega_S^2)$ に忠実に作用しているとき，

$$L := \{x \in H^2(S, \mathbb{Z}) \mid g^*(x) = x, \forall g \in G\}$$

は $L^*/L \simeq (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^a$ を満たす．ここで $L^* = \mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z})$ は L の双対格子である．

定義

$\mathrm{rank}\, L = r$ のとき，(S, G) を (r, a) 型の Eisenstein $K3$ 曲面という．

命題 (Artebani-Sarti, T)

1. Eisenstein $K3$ 曲面は (r,a) により 24 種類に分類．
2. (S,G) を (r,a) 型の Eisenstein $K3$ 曲面とする．このとき固定点集合 S^G は

$$S^G = C^{(g)} \amalg E_1 \amalg \cdots \amalg E_k \amalg \{P_1, \ldots, P_n\}$$

という型をしている．ここで $C^{(g)}$ は種数 g の非特異曲線，E_i は非特異有理曲線，P_j は孤立点である．また

$$g = \frac{22-r-2a}{4}, \quad k = \frac{2+r-2a}{4}, \quad n = \frac{r}{2} - 1.$$

が成り立つ．

命題

内 Galois 点を持つ 4 次曲面は $(4,3)$ 型の Eisenstein $K3$ 曲面である．

- $S : F_4(X,Y,Z) + F_1(X,Y,Z)W^3 = 0$
- $G_P = \langle\sigma\rangle$ は位数 3 の巡回群
  $\sigma : [X:Y:Z:W] \mapsto [X:Y:Z:\zeta_3 W]$

固定点集合は

$$\begin{aligned} S^{G_P} &= \{F_4(X,Y,Z) = 0\} \amalg \{[0:0:0:1]\} \\ &= C^{(3)} \amalg \{P_1\}. \end{aligned}$$

組 (S, G_P) は $(4,3)$ 型の Eisenstein $K3$ 曲面．

注意

$P_1 = [0:0:0:1]$ は Galois 点

命題 (Galois 埋め込み)

(S, G) を $(4, 3)$ 型の Eisenstein $K3$ 曲面とする．線形系 $|C^{(3)}|$ に付随した有理写像 $\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ は埋め込み．

1. S は非特異 4 次曲面 $F_4(X, Y, Z) + F_1(X, Y, Z)W^3 = 0$ と同型．
2. G の生成元は射影変換 $\sigma : [X : Y : Z : W] \mapsto [X : Y : Z : \zeta_3 W]$ を与える．

命題 (Saint-Donat)

$C^{(3)}$ と S 上の任意の楕円曲線が 2 点で交わらなければ，φ は埋め込み．

今の場合，Hurwitz formula より，$C^{(3)}$ と楕円曲線は 3 点で交わる．

外 Galois 点を持つ 4 次曲面と Gaussian $K3$ 曲面

外 Galois 点 P を持つ 4 次曲面

- $S : F_4(X, Y, Z) + W^4 = 0$
- G_P の生成元は $[X : Y : Z : W] \mapsto [X : Y : Z : iW]$

(S, G_P) は $(1, 0, 0, 3)$ 型の Gaussian $K3$ 曲面.

$(1, 0, 0, 3)$ 型の Gaussian $K3$ 曲面 (S, G)

- $G = \langle \sigma \rangle$ は位数 4
- $S^\sigma = S^{\sigma^2} = C^{(3)}$
- $\operatorname{rank} L \left(= \{x \in H^2(S, \mathbb{Z}) \mid \sigma^*(x) = x\} \right) = 1$

$|C^{(3)}|$ で Galois 埋め込みを作る.